

УДК 004.03

РОЗРОБКА МАПЛЕТУ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ

Глущенко Ігор

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук Гуртовий Ю.В.

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені
Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна*

Стаття присвячена розробці маплету для дослідження енергії хвильових рухів в тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з твердою кришкою». Наведено постановка задачі в першому лінійному наближенні. Представлені розв'язки першого наближення та дисперсійне рівняння. Вказані формули для обчислення енергії хвильового руху. Показано зовнішній вигляд користувацького інтерфейсу розробленого додатку.

Ключові слова: Maple, маплет, хвильові рухи.

CREATING APPS ON MAPLE

Glushchenko Ihor

Scientific supervisor: Yu.V. Hurtovyi, PhD

*Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,
Kropyvnytskyi, Ukraine*

The article is devoted to creating graphical applications in the Maple environment for investigation of waves motions energy in three-layer system “solid bottom layer – layer - layer with a solid”. The formulation of the problem in the first linear approximation is given. First approximation solutions and the variance equation are presented. Formulas for calculating wave motion energy are given. The UI of the developed application is shown.

Keywords: Maple, maplet, waves motions.

Постановка проблеми. З розвитком математичних пакетів різної спрямованості (CMS) виник інтерес до багатьох теоретичних та прикладних задач гідродинаміки, які раніше не досліджувались в силу складності реалізації математичних методів. Сучасні системи комп'ютерної алгебри дають можливість швидко та ефективно реалізовувати різноманітні математичні моделі, які описують поширення хвиль в рідких середовищах.

Значний інтерес викликають дослідження енергетичних процесів, які протікають в рідинах. Такі процеси застосовні при побудові установок, які використовують та перетворюють енергію хвиль в водоймах. Задачі про поширення внутрішніх хвиль вздовж поверхонь контакту трьох рідких шарів можуть моделювати сильно стратифіковані за глибиною області термоклин у океані.

Таким чином, актуальним є дослідження та побудова комп'ютерної моделі для дослідження енергетичних процесів при поширенні хвиль в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з твердою кришкою» з врахуванням сили поверхневого натягу на вільній поверхні та на поверхні контакту.

Аналіз досліджень і публікацій.

Дослідження внутрішніх та поверхневих хвиль у різноманітних гідродинамічних системах активно проводилося в СРСР та отримало активне продовження в роботах великої кількості дослідників як в Україні, так і в країнах СНД. Відмітимо, що у більшості робіт проведений детальний аналіз умов проходження хвиль на основі отриманих дисперсійних співвідношень для лінійної постановки задачі, розв'язки якої приводять до рівнянь теорії мілкої води.

Черкесов у роботах [1,2] провів дослідження поширення внутрішніх та поверхневих хвиль в однорідній та неоднорідній системах в залежності від ряду параметрів вказаних систем у наближенні мілкої води. Ним було досліджено у лінійному наближенні вплив в'язкості на рух довгих хвиль у двошаровій рідині скінченної глибини з вільною поверхнею та з кришкою. Проаналізовано вплив капілярності та періодичних збурюючих тисків на деформацію просторових поверхневих хвиль. Досліджено також рух та деформацію хвиль цунамі у прибережних зонах.

У монографії [3] розглянуто теоретичні та експериментальні дослідження поширення внутрішніх та поверхневих хвиль для однорідних та неоднорідних рідин. Доведені теореми існування та єдності розв'язків задачі Коші –

Пуассона, а також наведені обґрунтування наближених теорій – лінійної і мілкої води. Зокрема, Овсянніковим розглянуті лінійні задачі поширення хвиль у системах «шар з вільною поверхнею», «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею», «шар з твердим дном – шар з кришкою». Також наведений вивід ряду математичних моделей другого наближення за Лагранжем для різних типів хвильового руху. Отримані розв'язки другого наближення за Лагранжем для системи «шар з твердим дном – шар з кришкою», а також проаналізовані умови проходження хвиль в системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» на основі аналізу дисперсійного співвідношення.

Аналізом поширення хвиль-убивць та хвиль типу цунамі активно займається Доценко. Зокрема, у роботі [4] на основі даних спостережень в північно-західній частині Чорного моря виконано аналіз аномальних вітрових хвиль (хвиль убивць). В [5] у рамках нелінійної теорії методом скінченних різниць виконано аналіз розповсюдження хвиль цунамі з басейну в прямолінійний канал сталого прямокутного поперечного перерізу. Виявлено, що максимальна висота хвиль у каналі реалізується для осередків цунамі, розташованих на материковому схилі навпроти входу в канал.

В роботі [6] Редчиц та Гуржій чисельно моделювали ефект Магнуса при ламінарному обтіканні циліндра що обертається ламінарним потоком в'язкої рідини. Показано, що збільшення швидкості обертання циліндра значно знижує частоту відриву вихорів в потоці за циліндром. В той же час, збільшення швидкості потоку приводить до зростання частоти відриву крупномасштабних вихрових структур. Аналіз результатів чисельного розв'язку досліджуваної задачі дозволив виявити область параметрів, що залежать від числа Рейнольда, при яких нестационарний режим обтікання циліндра, що обертається, змінюється на стаціонарний.

В роботі [7] Зеньковскою досліджена довгохвильова нестійкість в задачі про термокапілярну конвекцію в горизонтальному шарі рідини, основну увагу приділено дослідженню коливної нестійкості, для головного члену числа Марагоні наведено явну формулу.

У [8] і [9] Кілініченком та Секерж-Зеньковичем експериментально дослідженні профілі стоячих гравітаційних двовимірних хвиль. Показано, що для даних хвиль має місце система вторинних циркуляційних течій, які охоплюють всю товщину рідини.

В роботі [10] Абрашкін побудував та проаналізував розв'язки для лінійних просторових періодичних хвиль в напівнескінченній рідині. Знайдено вираз для усередненої (за довжиною хвилі) швидкості горизонтального дрейфу частинок.

У [11] Братухіним та ін. експериментально та теоретично досліджена нова стійка конфігурація трьохфазної системи, утвореної газом, шаром рідини з вільною поверхнею, шаром рідини з твердим дном. Показано, що за наявності великого поверхневого натягу на вільній поверхні при малій глибині верхнього шару відбуваються локальні розриви верхнього шару, вздовж яких нижній шар контактує з газом.

Мета статті: створити комп'ютерну програму, яка дає можливість досліджувати енергетичні процеси хвильових рухів для різних геометричних та фізичних параметрів системи.

Виклад основного матеріалу.

Досліджується задача про поширення тривимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z): |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 , середнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, z): |x| < \infty, 0 \leq z < h_2\}$ з густиною ρ_2 та верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z): |x| < \infty, h_2 \leq z < h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 . Швидкості рідин v_j у Ω_j виражені через градієнт потенціалу φ_j , $j=1,2,3$. Шари Ω_1 та Ω_2 розділені поверхнею контакту $z=\eta_1(x, t)$, а шари Ω_2 та Ω_3 розділені поверхнею контакту $z=h_2+\eta_2(x, t)$. При розв'язанні враховуються сили поверхневого натягу на поверхнях контакту. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку. Рідини вважаються ідеальними та нестисливими, хвильові рухи, що досліджуються, безвихровими та потенціальними.

Математична постановка задачі у плоскому лінійному випадку має наступний вигляд

$$\begin{aligned}
\varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ в } \Omega_j, j=1,2,3, \\
\eta_{11,t_0} + \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ при } z=0, j=1,2, \\
\eta_{21,t_0} + \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ при } z=h_2, j=2,3, \\
\rho_1\varphi_{11,t_0} - \rho_2\varphi_{21,t_0} + (\rho_1 - \rho_2)\eta_{11} - T_1\eta_{11,x_0x_0} &= 0 \text{ при } z=0, \\
\rho_2\varphi_{21,t_0} - \rho_3\varphi_{31,t_0} + (\rho_2 - \rho_3)\eta_{21} - T_2\eta_{21,x_0x_0} &= 0 \text{ при } z=h_2, \\
\varphi_{31,z} &= 0 \text{ при } z=h_2+h_3, \\
\varphi_{11,z} &= 0 \text{ при } z=-h_1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Розв'язки задачі (1) було знайдено у вигляді прогресивних хвиль:

$$\begin{aligned}
\eta_{11} &= A \exp(i(kx - \omega t)) \\
\eta_{21} &= -\frac{\sinh(kh_2) \left((1 - \rho_2)k + T_1k^3 - \omega^2 \coth(kh_1) - \rho_2\omega^2 \coth(kh_2) \right)}{\omega^2 \rho_2} A \exp(i(kx - \omega t)) \\
\varphi_{11} &= -\frac{i\omega}{k \sinh(kh_1)} \cosh(k(h_1 + z)) A \exp(i(kx - \omega t))
\end{aligned} \tag{2}$$

Дисперсійне співвідношення:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_2^2 \omega^4}{\sinh^2(kh_2)} - \left((1 - \rho_2)k + T_1k^3 - \omega^2 (\coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2)) \right) ((\rho_2 - \rho_3)k + \\
+ T_2k^3 + \omega^2 (\coth(kh_2) - \rho_3 \coth(kh_3))) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Розв'язки (2) було знайдено з використанням CMS Maple. Для виведення формул для обчислення енергії хвильового руху використаємо методику, описану в [12]. Позначимо через E_1 , E_2 , E_3 та E енергії нижнього, середнього, верхнього шарів та повну енергію системи відповідно. Тоді:

$$\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dz, \\
E_2 &= -\frac{\rho_2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dz, \\
E_3 &= -\frac{\rho_3}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{h_2}^{h_2+h_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} dz, \\
E &= E_1 + E_2 + E_3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Вирази, для обчислення енергії були знайдені вперше з використанням CMS Maple. Так як дисперсійне співвідношення має дві пари коренів ω_1 та ω_2 то обчислення енергії за формулами (4) будемо проводити для кожної частоти окремо.

Кожна процедура (функція) у Maple задається наступним чином:

Im'я_процедури := **proc**(*набір входних змінних*)::*вихідний тип даних*

параметри процедури

тіло (обчислювальна частина)

end proc;

Так покажемо приклад реалізації декількох процедур. Дана процедура отримує на вхід ряд параметрів, заданих користувачем, а на виході видає графік залежності енергії нижнього шару від товщини нижнього шару для першої моди дисперсійного співвідношення ω_1 .

E1h3v1 := **proc** (r2, r3, T1, T2, k, h3)

local v1, h1, gr1, t, A, x, h2;

h1 := 10;

t := 100;

A := .1;

x := 0;

h2 := 1;

v1 := unapply(evalf(omega[1](r2, r3, T1, T2, k, h3, h2, h[1])), h[1]);

gr1 := plot(E1(t, A, x, v1(h[1]), r2, r3, T1, T2, k, h3, h2, h[1]), h[1] = 1 .. h1);

```
display(gr1)
```

```
end proc.
```

Оскільки нам необхідно досліджувати зміну енергії для чотирьох параметрів системи, нами було прийнято рішення створити 4 маплети, кожен з яких буде приймати на вході всі можливі параметри системи, а на виході виводити графіки залежності енергії хвильового руху для кожного параметра окремо. Для виклику кожного маплету ми створили ще один маплет, вікно якого зображено на мал.1.

Як, бачимо, даний маплет дозволяє обрати наступну дію, яку бажає здійснити користувач. кожна з кнопок (мал..2.) викликає новий маплет, а кнопка «Вихід» завершує роботу програми. Код для однієї з кнопок представлено нижче

```
Button("Залежність енергії від відношення густин нижніх шарів",  
Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet4)'), height = 30, width = 500).
```

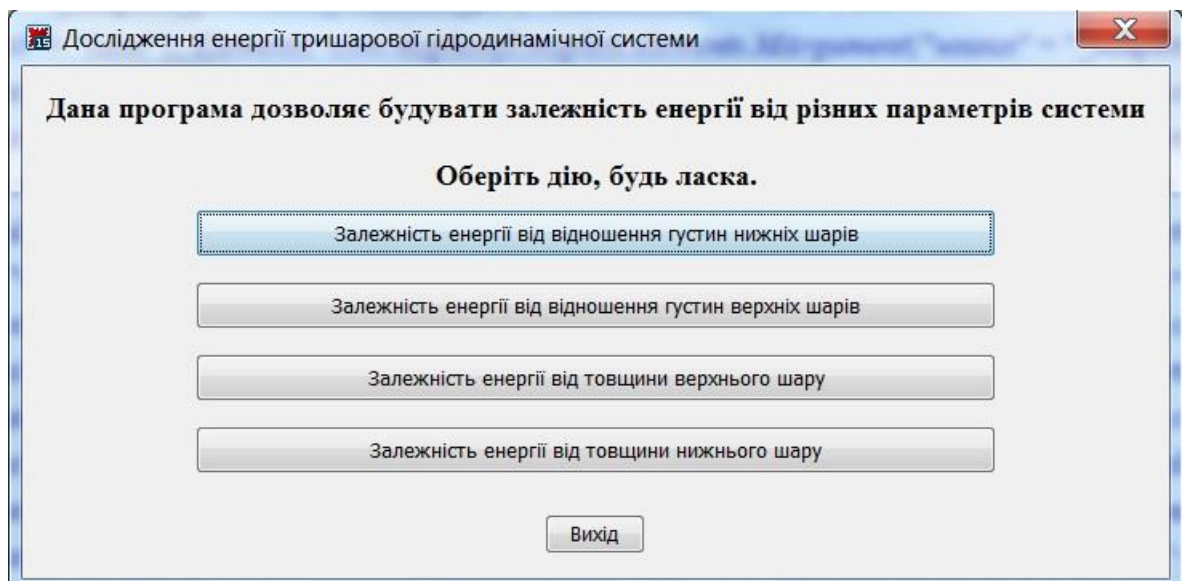
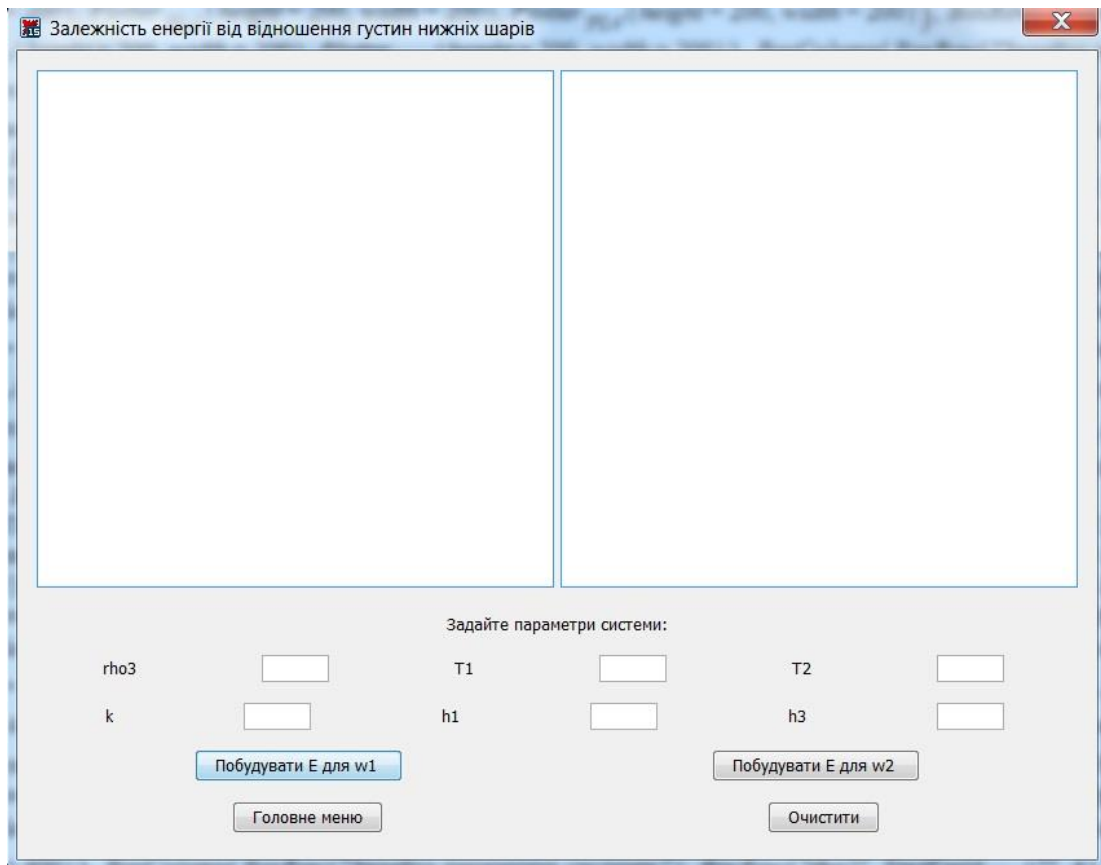


Рис. 1. Маплет для вибору наступного кроку.

На малюнку 2 зображено вікно програми для дослідження повної енергії системи в залежності від відношення густин нижніх шарів



Мал. 2. Маплет для дослідження енергії в залежності від відношення густин нижніх шарів.

При побудові цього маплету ми використали два елементи `Plotter()`, 6 елементів `TextField()` та чотири елементи `Button()`.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження

В процесі виконання поставлених завдань біло досліджено схему побудови маплетів в середовищі Maple. Відмітимо, що використання візуальних представлень даних є однією з складових математичного моделювання реальних явищ та процесів.

В цілому, робота має теоретичний характер і є основою для подальших досліджень тришарової гідродинамічної системи «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Результати дослідження, а саме створений програмний комплекс, можуть бути використанні при викладанні дисциплін, пов'язаних з математичним моделюванням.

Список використаної літератури

1. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн: монография [Черкесов Л. В.]. – К.: Наук, думка, 1976. – 364 с.
2. Поверхностные и внутренние волны: монография [Черкесов Л. В.]. – К: «Наукова думка», 1973. – 248 с.
3. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн: монография [Овсянников В.Л., Макаренко Н.И., Налимов В.И.].– Новосибирск: Наука, 1985.– 318 с.
4. Доценко С. Ф. Анализ двумерного распространения волн цунами из эллиптического очага в прямолинейный канал / С. Ф. Доценко, Н. К. В. Санникова // МГИ НАН Украины, 2011.– С 419 – 428.
5. Доценко С. Ф. Связь образования волн-убийц и метеорологических условий в северо-западной части Черного моря / С. Ф. Доценко, В. А. Иванов, Ю. А. Побережный // Доповіді НАН України, 2010. – №12. – С 105 – 109.
6. Редчиц Д.А. Численное моделирование эффекта Магнуса при обтекании кругового цилиндра невозмущенным потоком вязкой жидкости / Д. А. Редчиц, Гуржий А.А. // Прикладная гидромеханика. – 2012. – Т.14., №.1. – С. 42 – 50.
7. Зеньковская С.М. Длинноволновая колебательная неустойчивость Марангони в горизонтальном слое жидкости / С. М. Зеньковская // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, Вып. 5. – С. 837 – 843.
8. Килиниченко В. А. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты / В. А. Килиниченко, С. Я. Секерж–Зенькович // Известия РАН МЖГ. – 2007. – № 6. – С. 103 – 110.
9. Килиниченко В.А. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея / В. А. Килиниченко, С. Я. Секерж–Зенькович // Известия РАН МЖГ. – 2008. – №1.– С. 141 – 148.
10. Абрашкин А. А. Пространственные волны на поверхности вязкой жидкости / А. А. Абрашкин // Известия РАН МЖГ.– 2008.– №6. – С. 89 – 96.
11. Братухин Ю. К. Устойчивость стационарного разрыва жидкого слоя на поверхности несмешивающейся жидкости / Ю. К. Братухин, А. Л. Зуев, К. Г. Костарев, А. В. Шмаров // Известия РАН МЖГ. – 2009. – №3.– С. 11 – 22.
12. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч. 3:Механика невязкой жидкости: монография [Тарапов И.Е.].– Харьков: Золотые страницы, 2005.– 332 с.